

Title	孔のある平板に沿う流れ(ナビエ・ストークスの方程式の解)
Author(s)	浅井, 朗; 石井, 克哉; 橋本, 英典
Citation	数理解析研究所講究録 (1983), 476: 144-161
Issue Date	1983-01
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/103316">http://hdl.handle.net/2433/103316</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

## 孔のある平板に沿う流れ

東大 理 浅井 朗

石井 克哉

橋本 英典

## § 1 はじめに

平板 ( $y=0$ ) によって隔てられた 2 つの領域の片側 ( $y>0$ ) を満たす粘性流体の流れとして、 $x$  軸方向に流れる平行剪断流

$$V = (\alpha y, 0, 0), \quad y > 0, \quad (1.1)$$

を考える。ただし  $V$  は流体の速度、 $\alpha$  は剪断の強さを表わす正定数である。この流れは、上下流に圧力差がなく、軸方向の一樣な速度勾配による剪断力のみで運ばれる流体の運動を表わしている。

平板に欠陥のある場合、流れの様子は変化するが、ここでは最も簡単な例として、平板内に流れに垂直なスリット ( $-a \leq x \leq a$ ) があけられており、上方の流体がこのスリットを通して平板下方の同一性質の流体 (遠方で静止していると仮定する。) と接している場合を取り上げて、流れの様子を調べる。但し、剪断の大きさは十分小とし、流れの二次元性、非圧縮性及び定常性を仮定する。この仮定の下では、スリットの近

傍においては流れが遅いとして Stokes 近似を適用することができる。<sup>1)</sup> 遠方においては, Stokes 近似の妥当性は失われるが, 流れが平行剪断流(1.1)に近いとする Oseen 型の近似を適用することができる。ここでは, 切りつなぎ"摂動法"<sup>2)</sup>を用いて Stokes 近似と Oseen 型近似を接続することにより, 全域における流れの様子を調べる。また, スリットを通過する流量は 0 とする。

## § 2 問題の定式化

次のように約束する。

$$W = \{x = (x, y) \in R^2 \mid y=0, |x| \geq a\},$$

$$D = R^2 - W,$$

$$V(x) = [x \text{ における流体の速度}],$$

$$p(x) = [x \text{ における流体の圧力}],$$

$$\nu = [\text{流体の運動粘性率}],$$

$$\rho = [\text{流体の密度}], \quad (2.1)$$

速度  $V$ , 圧力  $p$  は次の関係を満足する(図 2-1 参照)。

$$\nu \Delta V - \frac{1}{\rho} \nabla p = (V, \nabla) V, \quad x \in D, \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot V = 0, \quad x \in D \quad (2.3)$$

$$V = 0, \quad (2.4)$$

$$V = (\alpha y, 0) \rightarrow 0, \quad z = |X| \rightarrow \infty (y > 0), \quad (2.5)$$

$$V \rightarrow 0, \quad z = |X| \rightarrow \infty (y < 0), \quad (2.6)$$

ここで変数変換(無次元化)

$$V' = \frac{V}{\alpha a}, \quad X' = \frac{X}{a}, \quad p' = \frac{p}{\rho \alpha^2 a^2}, \quad (2.7)$$

を行おうと, (2.2) - (2.6) は,

$$\frac{1}{R} \Delta' V' - \nabla' p' = (V' \cdot \nabla') V', \quad X' \in D' \quad (2.2')$$

$$\nabla' \cdot V' = 0, \quad X' \in D' \quad (2.3')$$

$$V' = 0, \quad X' \in W' \quad (2.4')$$

$$V' = (y', 0) \rightarrow 0, \quad |X'| \rightarrow \infty (y' > 0) \quad (2.5')$$

$$V' \rightarrow 0, \quad |X'| \rightarrow \infty (y' < 0) \quad (2.6')$$

となる。[2]に[2]し,

$$W' = \{X' = (x', y') \in R^2 \mid y' = 0, |x'| \geq 1\}, \quad (2.8)$$

$$D' = R^2 - W', \quad (2.9)$$

$$R = \frac{\alpha a^2}{\nu} \quad (2.10)$$

である。以下の議論はすべて無次元化された変数を用いて行い、' は省略することにする。

ここで流れの関数  $\psi$  を導入すると,

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.11)$$

と書け、(2.2)' - (2.6)' は次のようになる。

$$\Delta \Delta \psi = R \frac{\partial (\Delta \psi, \psi)}{\partial (x, y)}, \quad x \in D \quad (2.12)$$

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad x \in W, \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} - \gamma = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty \quad (\gamma > 0), \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty \quad (\gamma < 0), \quad (2.15).$$

ただし、ここでスリットを通る流量が0であることを考慮した。流れの関数 $\psi$ が知れば、(2.11)により $V$ が知れ、さらに(2.2)' から $p$ を知ることができる。したがって問題は(2.12) - (2.15)の解を調べることに帰着された。

### § 3 Stokes 近似

式(2.12)において、 $R \ll 1$ として右辺を無視すると、

Stokes 近似:

$$\Delta \Delta \psi = 0, \quad x \in D \quad (3.1)$$

となる。(2.12)を(3.1)で置き換えた問題は、次のような解

$\psi_1$  を持つ (図 3-1 参照)。

$$\psi_1 = \text{Im} \left[ -i \frac{z - \bar{z}}{4} \cdot \frac{z + (z^2 - 1)^{1/2}}{2} \right], \quad (3.2)$$

ただし、

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy \quad (3.3)$$

である。Stokes 近似のもとでの渦度  $\omega_1$ 、及び圧力  $p_1$  は、次のように表わされる。(図 3.2 図 3.3 参照)

$$\omega_1 = -\text{Im} \left[ \frac{i}{2} \left( 1 + \frac{8}{(z^2 - 1)^{1/2}} \right) \right] \quad (3.4)$$

$$p_1 = \text{Re} \left[ \frac{i}{2} \left( \frac{z}{(z^2 - 1)^{1/2}} \right) \right] + p_\infty \quad (3.5)$$

ただし  $p_\infty$  は無限遠方での圧力に相当する定数である。

スリットの存在により引き起こされる二次的な流れは、

$$\delta\psi_1 = \begin{cases} \psi_1 - \frac{y^2}{2} & (y < 0) \\ \psi_1 & (y > 0) \end{cases} \quad (3.6)$$

で表わされる。スリットから十分離れたところ ( $r \gg 1$ ) では、

$$\delta\psi_1 \approx \pm \frac{y^2}{8z^2} \quad \left( \begin{array}{l} + : y > 0 \\ - : y < 0 \end{array} \right) \quad (3.7)$$

であり、 $x < 0$  で入射、 $x > 0$  で放射する動径方向の流れとなる。動径方向の速度は、

$$v_2 = \frac{x\gamma}{4z} \quad (3.8)$$

で与えられ、各象限における総流量は、

$$Q_1 = \frac{1}{8} \quad (3.9)$$

で与えられる。

#### § 4 Stokes 展開と Oseen 型展開

領域  $D_S$  を、下半面およびスリットの近傍を含むある領域とする。 $x \in D_S$  を固定したときの漸近展開 (Stokes 展開):

$$\psi(x) \underset{R \rightarrow 0}{\sim} \psi_1(x) + R \psi_2(x) + o(R), \quad x \in D_S \quad (4.1)$$

を仮定する。Stokes 展開は Stokes 近似の精密化であり、下半面又は上半面  $r \ll R^{-1/2}$  の領域では近似が良くない。そこで、 $r \sim R^{-1/2}$  の領域での近似式を得るために、スケール変換

$$\varphi_R: D \ni x \rightarrow \tilde{x} = R^{1/2} x \in \tilde{D} \quad (4.2)$$

を行い、 $\tilde{x}$  を固定したときの漸近展開 (Oseen 型展開)

$$\tilde{\psi}(\tilde{x}) \underset{R \rightarrow 0}{\sim} \frac{\tilde{\gamma}^2}{2R} + f_2(R) \tilde{\psi}_2(\tilde{x}) + o(f_2(R)), \quad \tilde{x} \in \tilde{D}_0 \quad (4.3)$$

を仮定する。ただし、 $\tilde{D}_0$  はスリットから離れた平板上方の

ある領域  $D_0$  に対応する領域:

$$\tilde{D}_0 = \varphi_R(D_0) \quad (4.4)$$

であり、 $\tilde{\psi}$  は次式で定義される:

$$\tilde{\psi} = \psi \circ \varphi_R^{-1}. \quad (4.5)$$

展開 (4.1) 及び (4.3) の形は、 $D_0$  と  $D_S$  が共通領域を持つとして、matching の方法<sup>2)</sup>を用いて決定することができる。

### § 5 Oseen 型近似 (Oseen 型展開の第 2 項)

式 (3.2) と (3.7) を考慮して、(4.1) を Oseen 型展開すると、

$$\psi \sim \frac{\hat{y}^2}{2R} + \frac{\hat{y}^2}{8\hat{z}^2} + O(1). \quad (5.1)$$

一方、(4.3) を Stokes 展開すると、

$$\psi \sim \frac{y^2}{2} + \delta_2(R) \cdot [\tilde{\psi}_2(R^{1/2}x) \quad O(1)] \\ + O(\delta_2(R)). \quad (5.2)$$

展開 (5.1) と (5.2) に matching rule<sup>2)</sup> を適用すると、

$$\delta_2(R) = 1 \\ \tilde{\psi}_2(\tilde{z}) \sim \frac{\hat{y}^2}{8\hat{z}^2}, \quad \tilde{z} \rightarrow 0 \quad (5.3)$$

を得る。結局、Oseen 型展開は、



$$\psi \sim \frac{\tilde{y}^2}{2R} + \tilde{\psi}_2(\tilde{x}) + o(1), \quad \tilde{x} \in \tilde{D}_0 \quad (5.5)$$

の形でなければならぬ。したがって、 $\tilde{\psi}_2$  は次の条件から決定される。

$$\tilde{\Delta} \tilde{\Delta} \tilde{\psi}_2 = \tilde{y} \frac{\partial \tilde{\Delta} \tilde{\psi}_2}{\partial \tilde{x}}, \quad \tilde{x} \in \tilde{D}_0, \quad (5.6)$$

$$\tilde{\psi}_2 \rightarrow \frac{\tilde{y}^2}{8\tilde{z}^2}, \quad \tilde{z} \rightarrow 0 \quad (5.7)$$

$$\tilde{\psi} = \frac{\partial \tilde{\psi}_2}{\partial \tilde{y}} = 0, \quad \tilde{y} = 0 \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial \tilde{\psi}_2}{\partial \tilde{y}} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial \tilde{\psi}_2}{\partial \tilde{x}}, \quad \tilde{z} \rightarrow \infty \quad (5.9)$$

$$\text{in } E' \quad \tilde{\Delta} = \partial^2 / \partial \tilde{x}^2 + \partial^2 / \partial \tilde{y}^2$$

これは、一様流の場合の Oseen 近似に対応する近似であり、Oseen 型近似と呼ぶことにする。

この型の方程式は半無限平板の後縁を過ぎる流れについて今井、Stewartson<sup>3,4)</sup> によってとりあつかわれており、解は次のように表わされる(付録[A]参照)。

$$\tilde{\psi}_2(\tilde{x}, \tilde{y}) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \tilde{\psi}_2 \rangle(k, \tilde{y}) e^{ik\tilde{x}} dk, \quad (5.10)$$

$$\langle \tilde{\psi}_2 \rangle(k, \tilde{y}) = \frac{1}{32|k|c(k)} \int_0^{\infty} e^{-|k|\cdot|\tilde{y}-\eta|} A_i[(\eta-k)(i\tilde{y})^{1/3}]$$

$$= \frac{1}{32|k|} e^{-|k|\tilde{y}}, \quad (5.11)$$

ただし、

$$c(k) = \int_0^\infty e^{-|k|\eta} A: [(\eta - ik)(ik)^{1/3}] d\eta \quad (5.12)$$

である。

遠い下流:

$$\tilde{x} \gg 1, \quad \tilde{x}\tilde{y} \gg 1 \quad (5.13)$$

においては、

$$\tilde{\omega}_2 \sim -\frac{1}{16} f(\tilde{x}, \tilde{y}) \quad (5.14)$$

$$\tilde{u}_2 \sim \frac{1}{16} \int_0^{\tilde{y}} f(\tilde{x}, \eta) d\eta \quad (5.15)$$

である (付録[B], 図5-1, 図5-2 参照)。ただし、

$$\tilde{\omega}_2 = -\tilde{\Delta}\tilde{\psi}_2 \quad (5.16)$$

$$\tilde{u}_2 = \frac{\partial \tilde{\psi}_2}{\partial \tilde{y}} \quad (5.17)$$

$$f(x, y) = x^{-4/3} \left[ \gamma \cdot F_1\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{y^3}{9x}\right) - \frac{2}{3} \frac{y}{x^{1/3}} F_1\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{y^3}{9x}\right) \right], \quad (5.18)$$

$$\gamma = 3^{-1/6} \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{\Gamma(\frac{2}{3})} \quad (5.19)$$

$F_1$  は Kummer の関数 (5.20)

である。図(5.1)及び図(5.2)よりわかるように、遠い下流においては、スリットの影響は、

$$\tilde{y} \leq 4\tilde{x}^{1/3} \quad (5.21)$$

なる領域に限られている。

### § 6 あわりに

以上の議論から、次の命題が成立するものと予想される：

〔命題〕 十分小さな  $R$  に対して (2.12) - (2.15) の解が一意的に存在し、以下の条件を満たす。

$$\psi(x) \sim \psi^s(x) + o(1), \quad x \in D_s, \quad (6.1)$$

$$\tilde{\psi}(\tilde{x}) \sim \psi^o(x) + o(1), \quad \tilde{x} \in \tilde{D}_o, \quad (6.2)$$

$$\psi^o \circ \varphi_R(x) = \bar{\psi}(x) + o(1), \quad x \in D_s \cap D_o, \quad (6.3)$$

$$\psi^s \circ \varphi_R^{-1}(\tilde{x}) = \hat{\bar{\psi}}(\tilde{x}) + o(1), \quad x \in \varphi_R(D_s \cap D_o). \quad (6.4)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \psi^s(x) &= \psi_1(x), \\ \psi^o(\tilde{x}) &= \frac{\tilde{y}^2}{2R} + \tilde{\psi}_2(\tilde{x}), \\ \bar{\psi}(x) &= \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{8} \frac{y^2}{z^2}, \\ \hat{\bar{\psi}}(\tilde{x}) &= \bar{\psi} \circ \varphi_R^{-1}(\tilde{x}). \end{aligned} \quad (6.5)$$

## 参考文献

- 1) 橋本英典：数理解析研究所講究録 335 (1978) 1.
- 2) M. Van. Dyke : Perturbation Method In Fluid Mechanics, Academic Press (1964).
- 3) I. Imai : Proc. 11th Int. Cong. Appl. Mech. Munich, (1966) 663.
- 4) K. Stewartson : Proc. Roy. Soc. A 306 (1968) 275.
- 5) S. Wakiya : J. Phys. Soc. Jpn., 39 (1975) 1113.

## 附録

## [A] Dscen 型近似の解の導出

についての Fourier 変換を  $\langle \rangle$  で表わす。すなわち、

$$F(\tilde{x}, \tilde{y}) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle F \rangle(k, \tilde{y}) e^{ik\tilde{x}} dk, \quad (A.1)$$

$$\langle F \rangle(k, \tilde{y}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\tilde{x}, \tilde{y}) e^{-ik\tilde{x}} d\tilde{x}. \quad (A.2)$$

すると、 $\langle \tilde{\psi}_2 \rangle$  に対する条件は、

$$\frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} \langle \tilde{\omega}_2 \rangle = ik(\tilde{y} - ik) \langle \tilde{\omega}_2 \rangle, \quad (A.3)$$

$$-(\frac{\partial^2}{\partial \tilde{y}^2} - k^2) \langle \tilde{\psi}_2 \rangle = \langle \tilde{\omega}_2 \rangle \quad (A.4)$$

$$\langle \psi_2 \rangle(k, 0) = 0, \quad (A.5)$$

$$\partial \langle \tilde{\psi}_2(k, 0) \rangle / \partial \tilde{y} = 1/16, \quad (A.6)$$

$$\langle \psi_2 \rangle, \partial \langle \tilde{\psi}_2 \rangle / \partial \tilde{y} \rightarrow 0, \quad \tilde{y} \rightarrow \infty. \quad (A.7)$$

(A.3) の一般解は、

$$\langle \omega_2 \rangle = A(k) A_i [(\tilde{y} - ik)(ik)^{1/3}] + B(k) B_i [(\tilde{y} - ik)(ik)^{1/3}] \quad (A.8).$$

ただし、 $A(k)$ ,  $B(k)$  は任意、 $A_i$ ,  $B_i$  は Airy の関数である。(A.4) の一般解は、

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\psi}_2 \rangle = & \int_0^\infty \frac{e^{-|k| |\tilde{y} - \eta|}}{2|k|} \langle \tilde{\omega}_2 \rangle(k, \eta) d\eta \\ & + a(k) e^{1/2 |k| \tilde{y}} + b(k) e^{-1/2 |k| \tilde{y}}. \end{aligned} \quad (A.9)$$

ただし、 $a(k)$ ,  $b(k)$  は任意。(A.5) - (A.7) を用いて  $A(k)$ ,  $B(k)$ ,  $a(k)$ ,  $b(k)$  を定めると、本文の表式を得る。

[B]  $\tilde{x}$ ,  $\tilde{x} \tilde{y} \gg 1$  における  $\tilde{\omega}_2$ ,  $\tilde{u}_2$  の漸近形

$\tilde{x}$ ,  $\tilde{x} \tilde{y} \gg 1$  の領域においては、 $\tilde{\omega}_2$  の積分において、

$k \sim 0$  の部分が主要な寄与を与える。そこで、被積分関数の  $k \rightarrow 0$  におけるふるまいを調べる。

$$C(k) \sim \frac{1}{3} (ik)^{-1/3}, \quad k \rightarrow 0 \quad (B.1)$$

であるから、<sup>4)</sup>

$$A: [(\tilde{y} - ik)(ik)^{1/3}] e^{ikx}/c(k) \sim 3(ik)^{1/3} A: [\tilde{y}(ik)^{1/3}] e^{ik\tilde{x}} \quad (B.2)$$

したがって、

$$\tilde{\omega}_2 \sim \frac{3}{16} \int_{-\infty}^{\infty} (ik)^{1/3} A: [\tilde{y}(ik)^{1/3}] e^{ik\tilde{x}} dk \quad (B.3)$$

この積分を実行することにより、(5.14)を得る。

$$\partial^2 \tilde{\psi}_2 / \partial \tilde{x}^2 \ll \partial^2 \tilde{\psi}_2 / \partial \tilde{y}^2 \quad (B.4)$$

であることから、

$$\tilde{\omega}_2 \sim -\partial^2 \tilde{\psi}_2 / \partial \tilde{y}^2 = -\partial \tilde{u}_2 / \partial \tilde{y} \quad (B.5)$$

これより、(5.15)を得る。

付記

[1] Stokes 展開の第2項

Stokes 展開の第2項は、Oseen 型展開の第1項との matching 条件から決定される。結果は次のようになる。

$$\begin{aligned} \psi_2 = & -\frac{1}{256} \operatorname{Im} \left[ \frac{1}{4} (z - \bar{z})^2 \{ (z-1) \log(z-1) - (z+1) \log(z+1) \} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} ((z^2-1)^{1/2} - \overline{(z^2-1)^{1/2}}) + \frac{1}{2} z^2 (z^2-1)^{1/2} (\bar{z}-z) - (z-\bar{z})^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \log \frac{z + (z^2 - 1)^{1/2}}{2} \\
& + \frac{1}{3} \left\{ \bar{z}^3 (z^2 - 1)^{1/2} + \bar{z} z^4 (z^2 - 1)^{-1/2} - z^3 (z^2 - 1)^{-1/2} - z^2 + \bar{z} z^3 \right. \\
& \quad \left. + \bar{z} z^3 \right\} \\
& - \frac{1}{4} \pi i (z - \bar{z}) (z - (z^2 - 1)^{1/2}) (z - 2) \\
& + \pi i (z - \bar{z}) (z + (z^2 - 1)^{1/2}) \Big].
\end{aligned}$$

## [ 2 ] 一般化

本文の議論は、一般の形の二次元欠陥に拡張可能で、 $\tilde{\psi}_2$  の形は定数倍を除いて一般的なものであることがわかる。詳細は、別の機会に発表する予定である。なおストークス近似による結果(3.2)は円(凸, 凹)形の欠陥について双極座標をもちいた脇屋の結果<sup>5)</sup>の特殊なばあいと一致することも確かめられる。

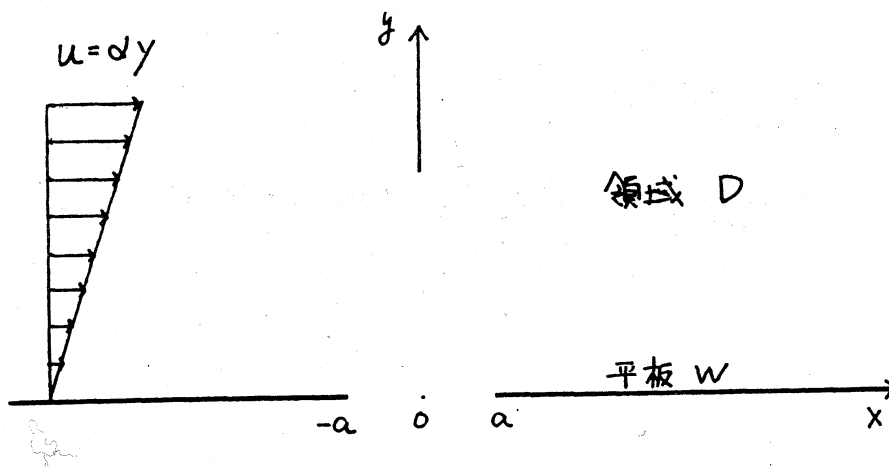


図 2-1 孔のある平板に流る流れ

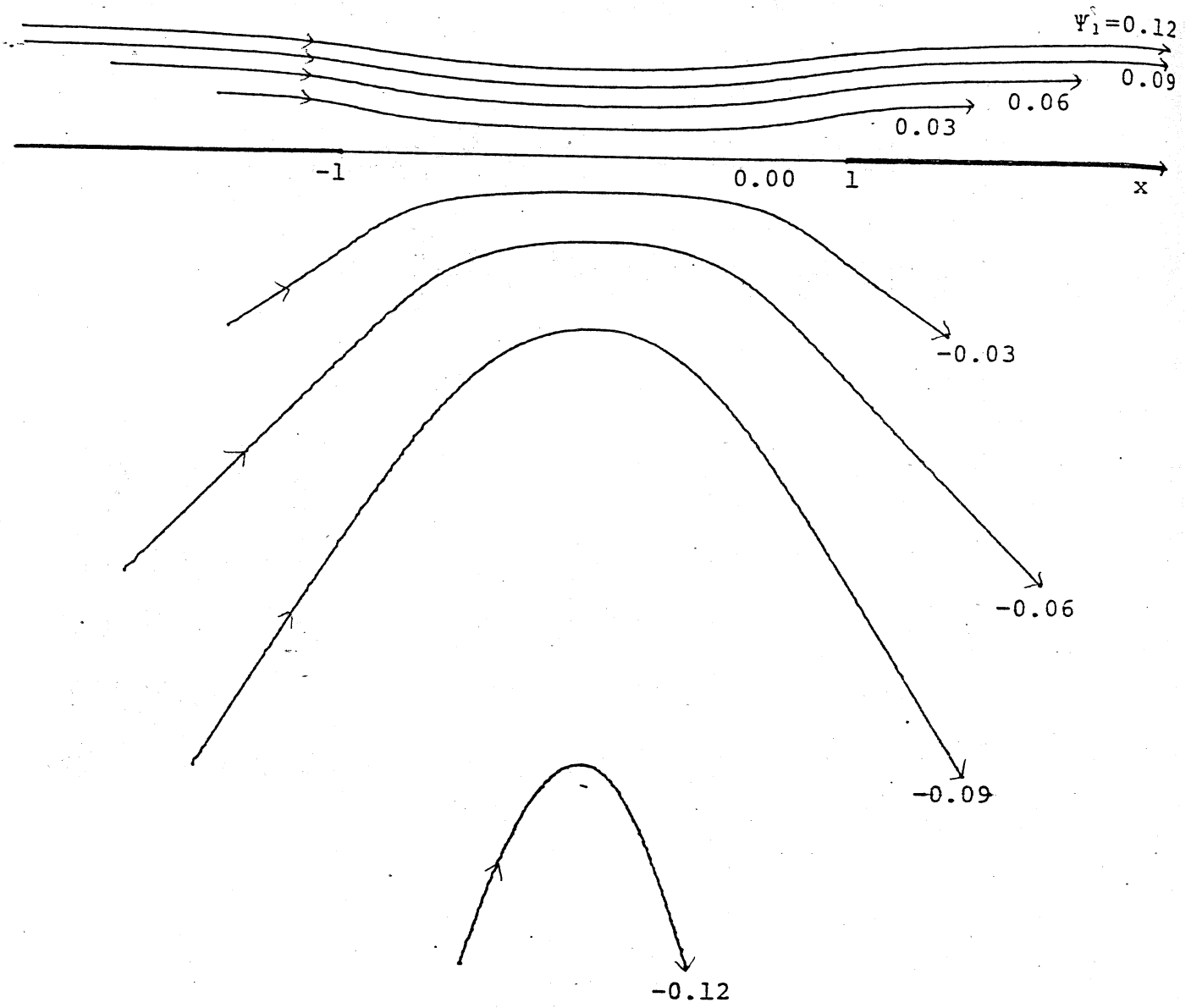


図3-1  $\psi_1$  の表わす流れの流線



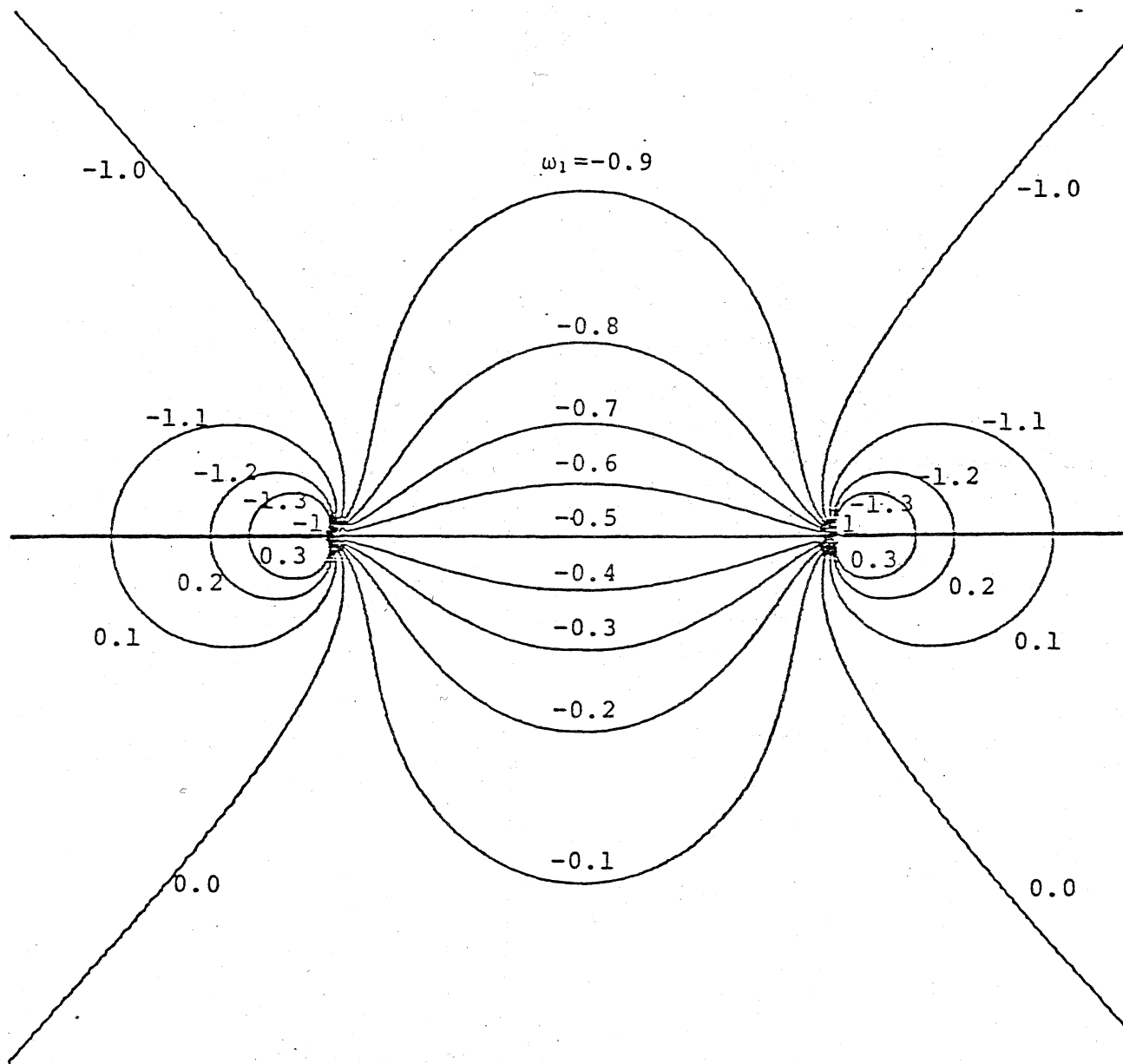


図 3-2  $\psi_1$  の表わす流れの等流度線  
 $(\omega_1 = -\operatorname{Im} [\frac{i}{2}(1+z(z^2-1))^{-1/2}])$

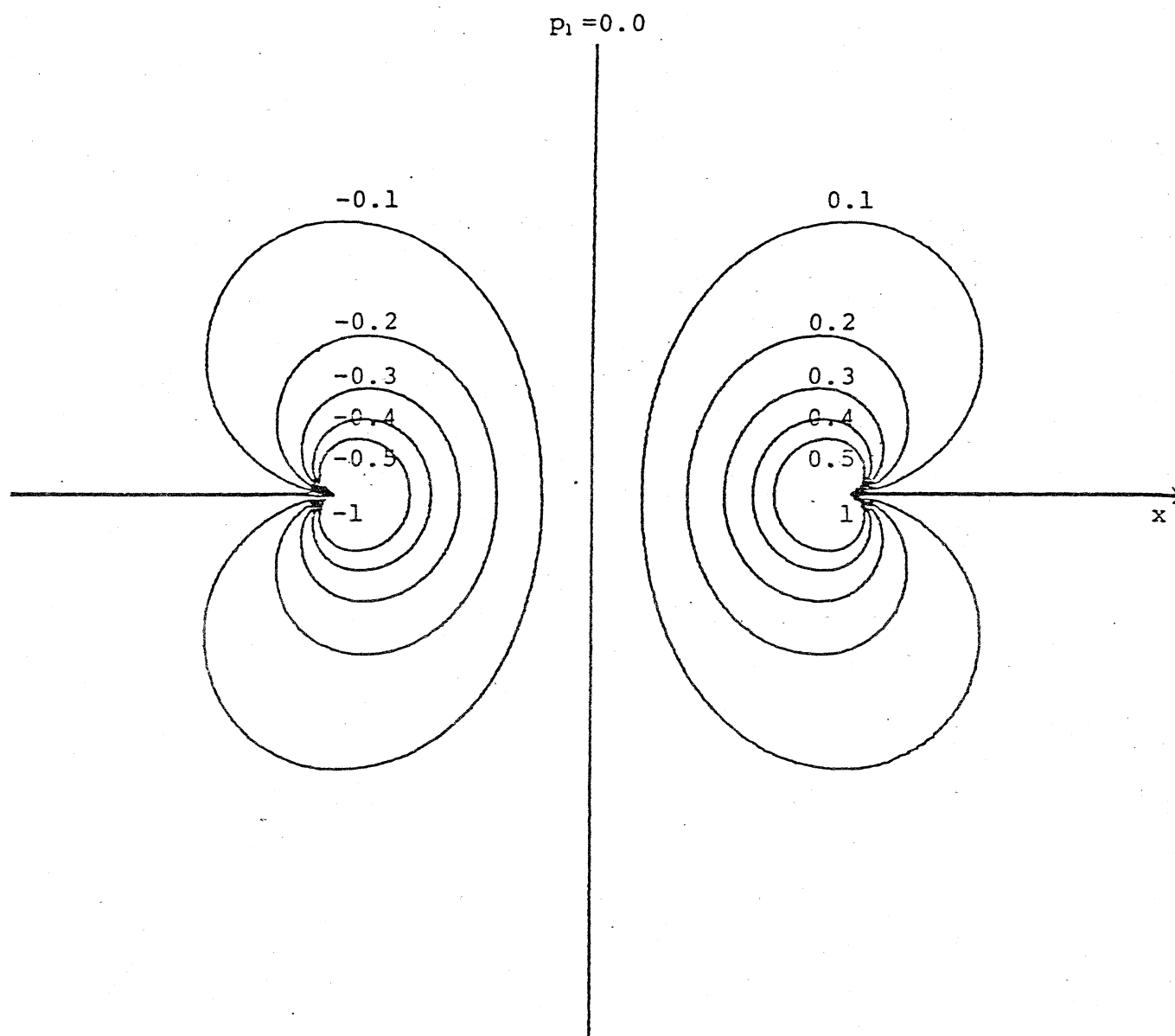


図3-3  $\psi_1$  の表わす流れの等圧線  
 $\left( p_1 = \operatorname{Re} \left[ \frac{i}{2} z (z^2 - 1)^{-1/2} \right] \right)$

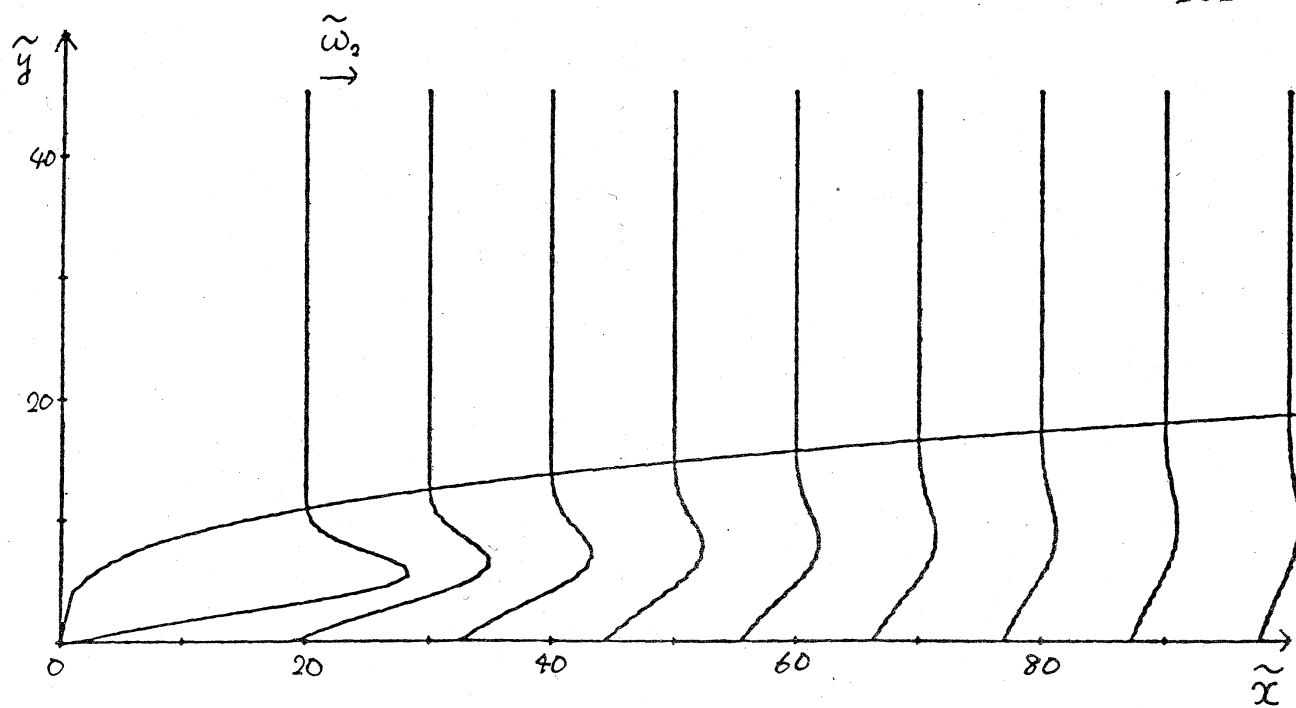


図 5-1  $\tilde{\omega}_2$  のグラフ

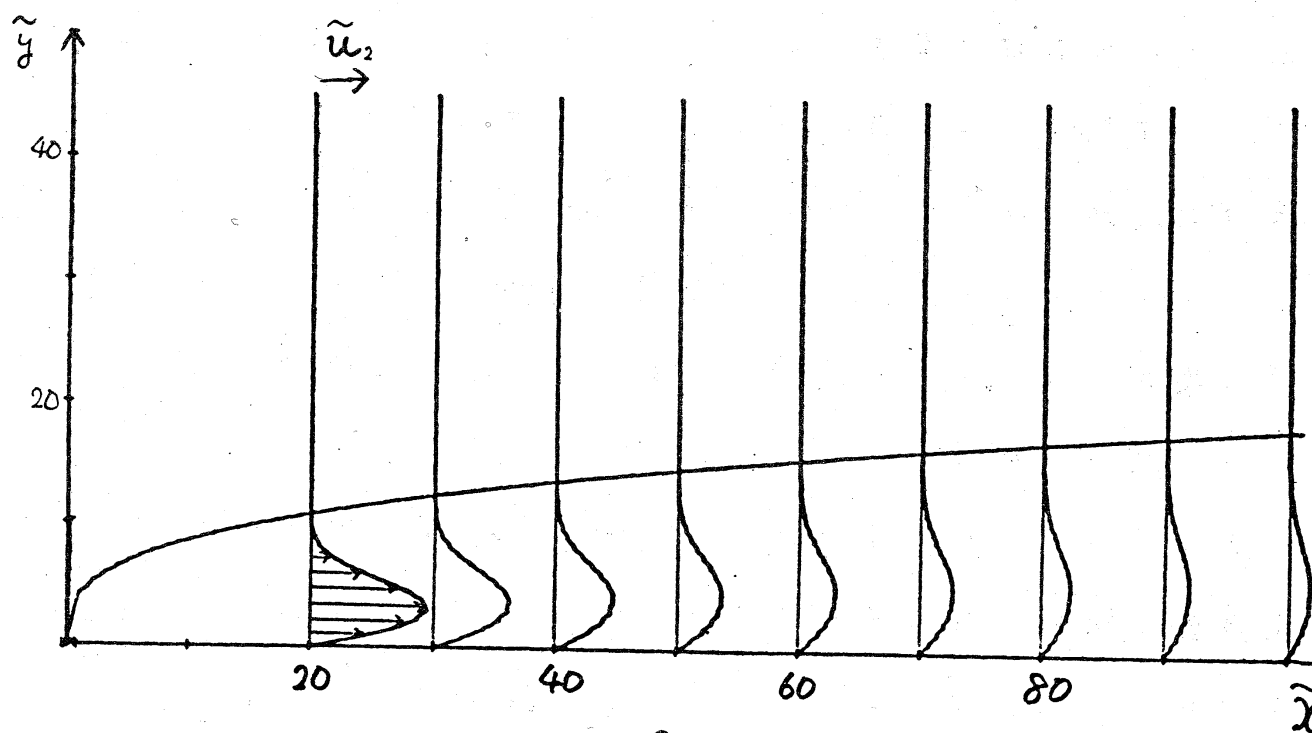


図 5-2  $\tilde{u}_2$  のグラフ